INHALT

3.4 Simplexverfahren

Zielfunktion: $G = g_1x_1 + g_2x_2 + \ldots + g_jx_j$ => $-G + g_1x_1 + g_2x_2 + \ldots + g_jx_j = 0$

n Lösungsvariable x_i

m Ungleichungen als Höchstens-Bedingungen

m Schlupfvariable y_j => m lineare Gleichungen mit $m + n$ "Unbekannten"

1. Basislösung mit: alle $x_i = 0$

Wahl des Pivot-Elements: Spalte mit größem g_j. Zeile mit kleinstem q_i

Abbruch beim Optimum, wenn kein $g_j > 0$

3.8 Zwei-Phasen-Methode

1.Phase

3 mögliche Verletzungen der Standardbedingungen:

1. Minimierung: $-G$ statt G ansetzen, Zielgleichung umformen $-G\ldots = 0$
2. Mindestbedingungen: Ungleichungen * (-1), auch die rechte Seite (b_i)
3. Gleichungsbed: Schlupfvariable w einsetzen, w zuerst aus der Lösung nehmen

Basislösung ist zulässig, wenn $w = 0$ und kein $b_i < 0$

wenn nicht zulässig: 1. w aus der Lösung entfernen
2. negativstes b_i als Pivotzeile, negatives Pivotelement wählen

wenn zulässig, dann mit dem Standard-Simplexverfahren weiterrechnen (siehe oben)

= 2.Phase

d.h. ab jetzt bildet man die Engpass-Quotienten q_i

Pivotspalte, wo g_j am größten ist, Pivot-Zeile, wo q_i am kleinsten ist.

3.1 OPERATIONS RESEARCH

"Operations Research" enthält quantitative Planungsverfahren. Optimierungsverfahren.

Für quantitative Planungen muss man die konkreten Sachverhalte möglichst genau in Form mathematischer Gleichungen und Ungleichungen abbilden.
Am einfachsten sind lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme. *Teschl S. 335ff*

Diese mathematischen Modelle bestehen aus Zielfunktion und Bedingungen (Restriktionen)

Beisp. 3.1 Optimales Produktionsprogramm (nach *Ellinger* S.16ff)

Ein Betrieb verfügt für die Fertigung der beiden Produkte P_1 und P_2 über 3 Produktionsfaktoren:

(1) eine Werkzeugmaschine, die in der Planungsperiode 1200 Stunden eingesetzt werden kann,
(2) den Rohstoff, von dem 3000 Mengeneinheiten verfügbar sind,
(3) die Arbeitskräfte, die bei der Qualitätskontrolle knapp sind, sie können für diese Fertigung höchstens 125 Std. eingesetzt werden.

1 Stück P_1 erfordert 3 Maschinenstunden und 5 Mengeneinheiten des Rohstoffs.
1 Stück P_2 erfordert 2 Maschinenstd. und 10 Mengeneinheiten des Rohstoffs.
P_2 muss einer speziellen, aufwendigen Qualitätsprüfung unterzogen werden, die Produkte P_2 erfordern deshalb 0,5 Stunden Arbeitskraft/Mengeneinheit.

Für die Stück-Deckungsbeiträge (Stück-Gewinne) g_j wurde kalkuliert
$g_1 = 3$ €/Stück, $g_2 = 4$ €/Stück.

Das Fertigungsprogramm (x_1, x_2) mit dem maximalen Deckungsbeitrag G ist gesucht.

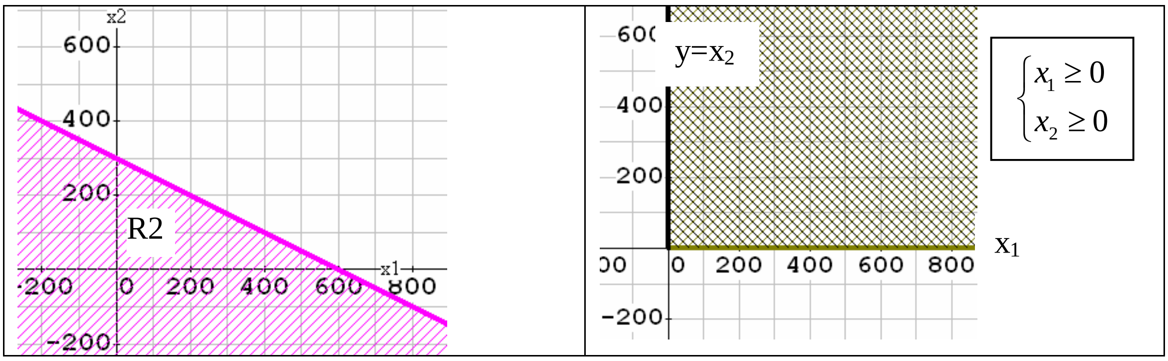
Aus diesen Bedingungen formuliert man das mathematische Modell.

Die Zielfunktion		$G = 3x_1 + 4x_2$
Restriktion 1:	Beschränkung der Maschinenkapazität:	$3x_1 + 2x_2 \le 1200$
Restriktion 2:	Beschränkung des Rohstoffes:	$5x_1 + 10x_2 \le 3000$
R3:	Beschränkung der Arbeitskräfte:	$0{,}5\, x_2 \le 125$
Keine negative Produktionsmengen:		$x_1 \ge 0.\quad x_2 \ge 0$

Für 2 Variablen x_1, x_2 kann man das Problem graphisch lösen

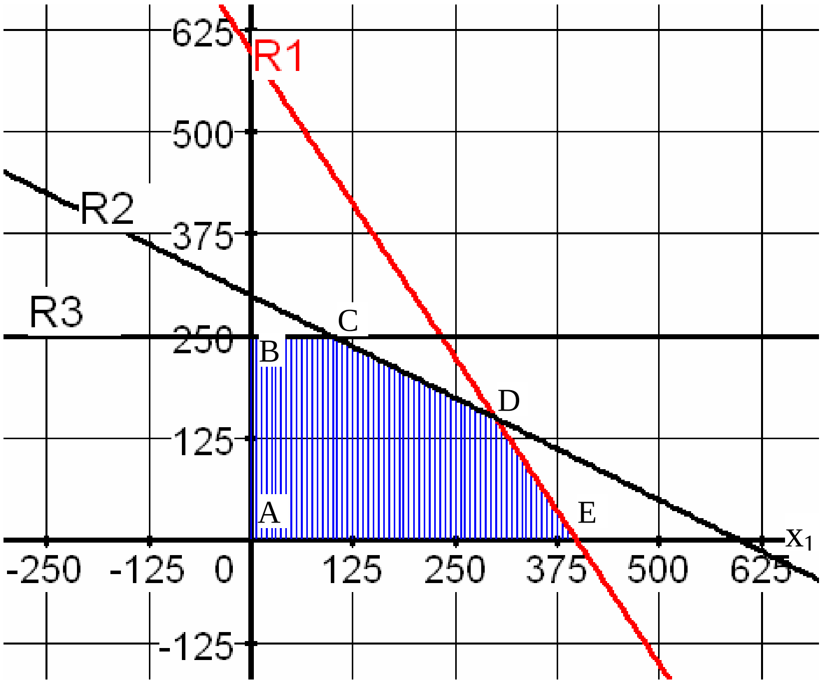
Zum Beispiel gilt für die Rohstoff-Beschränkung:
der Funktionsgraph zu der *Gleichung* $5x_1 + 10x_2 = 3000$ oder $x_2 = -0{,}5x_1 + 300$ ist eine Gerade, die die Koordinatenebene in 2 Halbebenen zerlegt. Eine dieser beiden Halbebenen ist die Punktmenge, die die obige *Ungleichung* $5x_1 + 10x_2 \le 3000$ erfüllt.
Die schraffierte Fläche erfüllt die Ungleichung.

Die Grenzgeraden der Beschränkungen nennt man Restriktionsgeraden R1 … R3.
Die Nicht-Negativitäts-Bedingungen $x_j \ge 0$ beschränken den Planungsraum auf den 1.Quadranten:



3.2 GRAPHISCHE LÖSUNG

Den oben formulierten 5 Bedingungen entsprechen 5 Halbebenen:



Die Schnittmenge der 5 Halb-Ebenen ist die Fläche eines 5-Ecks. Jeder Punkt (x_1 | x_2) in dieser Fläche entspricht einer zulässigen Lösung des Produktionsprogramms.

Die Eckpunkte A, B, C, D, E gehören zu den zulässigen Lösungen; sie lassen sich durch Schnitt der betreffenden Geraden ermitteln; z.B. Eckpunkt D:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1200 & \| \cdot(-5) \\ 5x_1 + 10x_2 = 3000 & \| (+) \end{cases}$$

$-10x_1 = -3000 \Rightarrow x_1 = 300$
in 2.Zeile: $1500+10x_2=3000$
$\Rightarrow x_2 = 150$
Eckpunkt D (300 | 150)

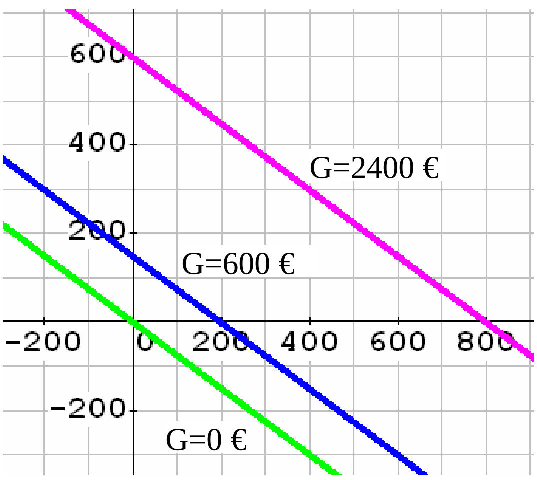
Fünf Restriktionsgeraden haben maximal $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ Schnittpunkte. (Fakultät $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

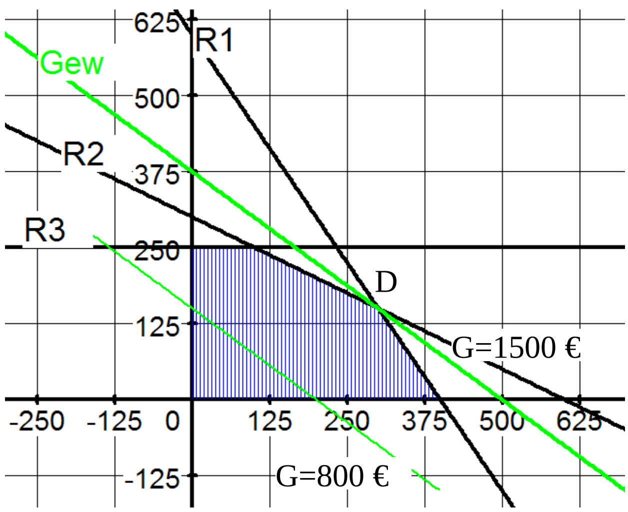
Im gegebenen Fall sind das: $\frac{(3+2)!}{3!\,2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$ Punkte, davon 5 zulässige Lösungen.

Bei m = 20; n = 10: $\frac{(20+10)!}{20!10!} = \frac{2,65 \cdot 10^{32}}{2,43 \cdot 10^{18} \cdot 3,6 \cdot 10^{6}} = 3.628.800$ Punkte

Die Zielfunktionen $G = 3x_1 + 4x_2$ oder $x_2 = -0,75\,x_1 + 0,25\,G$ oder $y = -0,75\,x + 0,25G$ bilden eine Parallelenschar mit der Steigung m = - 0,75:
0,25 · G sind die x_2-Achsen-Abschnitte dieser Geraden.
Längs einer solchen Iso-Gewinn-Geraden ist der Gewinn G gleich hoch.
Zum Beispiel längs der Iso-Gewinn-Geraden $2400 = 3x_1 + 4x_2$ ist G = 2400 €.
Je weiter eine Gerade vom Ursprung (0|0) entfernt liegt, desto größer ist der Gesamtgewinn G.

Fügt man die Parallelenschar der Isogewinn-Geraden zum Planungsraum hinzu, erkennt man unmittelbar, dass der Eckpunkt D das gewinn-maximale Fertigungsprogramm darstellt.





3.3 VERALLGEMEINERUNG

1. Mit den n Produkten x_j erzielt man die Deckungsbeiträge g_j. $(j = 1 \ldots n)$

   Ziel einer linearen Optimierung ist das Maximum von $G = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j$ zu bestimmen.

   Die g_j nennt man auch Zielfunktions-Koeffizienten.
   Die x_j nennt man Lösungs-, Entscheidungs- oder Strukturvariable.

2. Die Produktion der Produkte x_j unterliegt m Beschränkungen (Restriktionen).

   Das Ziel G_{max} soll unter den m Nebenbedingungen $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i$ erreicht werden. $(i = 1 \ldots m)$

   $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i$ ist ein System linearer Ungleichungen:
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

   Es sind ausschließlich Höchstens-Bedingungen.
   Außerdem gelten die Nicht-Negativitäts-Bedingungen $x_j \ge 0$.
   Die a_{ij} nennt man auch technische Koeffizienten.

4. Die Schnittmenge der m Beschränkungen (Restriktionen) ergibt den Planungsraum, der alle zulässigen Lösungen (x_j^{zul}) enthält. Diese Schnittmenge bildet einen Polyeder (Simplex) im j-dimensionalen Raum mit (vielen) zulässigen Eckpunkten.

5. Die optimale Lösung (x_j^{opt}) liegt in einem Eckpunkt.
   Eine lineare Funktion G, die auf einem konvexen Polyeder mit den Punkten (x_j^{zul}) definiert ist, nimmt ihr Maximum in einem **Eckpunkt** des Polyeders an.

6. Zur Bestimmung der Eckpunkte benötigt man ein lineares Gleichungssystem. Wenn man in jeder Ungleichung eine Schlupfvariable y_i hinzufügt, dann entsteht ein lineares Gleichungssystem.
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \end{cases}$$

7. Um die optimale Lösung (x_j^{opt}) zu bestimmen, müssen nicht alle Eckpunkte des Polyeders berechnet und dann auf Optimalität geprüft werden.
   Statt dessen startet man mit der schlechstmöglichen Ausgangslösung:
   alle $x_j = 0$, im Ursprung O, $G = 0$
   und verbessert diese Lösung schrittweise (iterativ) durch geeignete Wahl der Pivot-Elemente und wandert so von einem Eckpunkt zum nächsten besseren Eckpunkt…
   Nach einer endlichen Anzahl Schritte ist mit diesem **Simplex-Verfahren** die Optimal-Lösung erreicht.

   [DANTZIG, George, Washington 1947, †2005 (Dantzig-Preise für Mathematical Programming)]

3.4 SIMPLEX-VERFAHREN

1. Um die Rechnungen übersichtlich durchführen zu können, arbeitet man auf einem passenden Tableau. Zum Beispiel für das Ausgangstableau (1.Basislösung) für n = 2 und m = 3 :

aktuelle Basis-variable	Linke Seite, Variable x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Rechte Seite b(i)	Engpass Quotient q(i)
y_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1	
y_2	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2	
y_3	a_{31}	a_{32}	0	0	1	b_3	
- G	g_1	g_2	0	0	0	0	

2. Es liegen *n* unbekannte Entscheidungsvariable x_j und *m* unbekannte Schlupfvariable y_i vor. Die Anzahl der Gleichungen ist *m*. Das lineare Gleichungssystem also unterbestimmt, d.h. man kann Variable wählen. Man wählt als Ausgangslösung: alle $y_i = 1$ und alle $x_j = 0$. Basisvariable (besetzte Felder) sind also zunächst nur die Schlupfvariablen.

3. Die Wahl des Pivot-Elementes ist entscheidend für die Verbesserung der jeweiligen Lösung. Das Pivot-Element steht im Schnittpunkt der Pivot-Spalte und der Pivot-Zeile.
   Man wählt das Pivot-Element so, dass
   (1) der höchste Anstieg des Stück-Deckungsbeitrags g_j erfolgt => Pivot-Spalte
   (2) die Kapazität des Engpass-Faktors i ausgenutzt wird => Pivot-Zeile
   maximales g_j und minimales q_i

4. Mit Hilfe des GAUß-JORDAN-Verfahrens werden schrittweise die Schlupfvariablen aus den besetzten Feldern entfernt und durch Lösungsvariable ersetzt. Die Lösungsvariablen werden zu Basisvariablen. In den Pivot-Spalten entstehen Null-Elemente.

5. Solange es in der Zeile der Zielfunktion noch positive Deckungsbeiträge $g_j > 0$ gibt, lässt sich die Lösung verbessern. **Optimalitätskriterium alle $g_j \le 0$**
   Die sich ändernden Zielfunktionskoeffizienten nennen wir vereinfachend weiterhin g_j.

Das Simplexverfahren mit unserem Beispiel 3.1:

Das lineare Gleichungssystem für unser Beispiel besteht aus folgenden Gleichungen:

Maschinenkapazität	$3x_1 + 2x_2 + y_1$	$= 1200$
Rohstoff:	$5x_1 + 10x_2 + y_2$	$= 3000$
Arbeitskräfte:	$0x_1 + 0{,}5x_2 + y_3$	$= 125$
Zielfunktion	$-G + 3x_1 + 4x_2$	$= 0$

(Umformung nach: $G = 3x_1 + 4x_2 \Rightarrow 0 = -G + 3x_1 + 4x_2 \Rightarrow -G + 3x_1 + 4x_2 = 0$)

Das Ausgangstableau (1.Basislösung) hat also folgendes Aussehen:

aktuelle Basis-variable	Linke Seite, Variable x(1)	x(2)	y(1)	y(2)	y(3)	Rechte Seite b(i)	Engpass Quotient q(i)
y(1)	3	2	1	0	0	1200	
y(2)	5	10	0	1	0	3000	
y(3)	0	0,5	0	0	1	125	
- G	3	4	0	0	0	0	

x(1)=0, x(2)=0, die 3 Schlupfvariablen sind die Basisvariable,
$y_1 = 1200$. $y_2 = 3000$. $y_3 = 125$. $G = -3 \cdot 0 + -4 \cdot 0 = 0$.

Diese Basislösung ist selbstverständlich nicht optimal. Es gibt noch $g_j > 0$.
Für jede Einheit, die man in der x_2-Spalte einsetzt, würde sich der Deckungsbeitrag um 4 erhöhen, in der x_1-Spalte um 3.
Es müssen also Entscheidungsvariable x_j statt Schlupfvariable y_i in die Lösung.

→ Excel / Simplex
Teschl S. 339ff

3.5 VERFAHRENSSCHRITTE

1. Wahl des Pivot-Elements:

(1) die größte Änderung des Deckungsbeitrages verspricht $\max(g_j) = g_2 = 4$
damit wird die x_2-Spalte zur Pivot-Spalte.

(2) x_2 wird man so groß wie möglich machen, d.h. bis zur Kapazitätsgrenze.
Die Restriktions-Ungleichungen setzen diese Grenze; man sucht den Engpass.
Die bisher gesetzten Basisvariable dürfen nicht negativ werden:
1.Zeile: y_1 ersetzen => die Grenze ist bei $y_1 + 2x_2 = 1200$ => $x_2 = 1200/2 = 600$
2.Zeile: y_2 ersetzen => die Grenze ist bei $y_2 + 10x_2 = 3000$ => $x_2 = 3000/10 = 300$
3.Zeile: y_3 ersetzen => die Grenze ist bei $y_3 + 0{,}5x_2 = 125$ => $x_2 = 125/0{,}5 = 250$
Zum Beispiel würde mit $x_2 > 251$ y_3 negativ: $y_3 + 0{,}5 \cdot 251 = 125$ => $y_3 = -0{,}5$
Der Engpass ist der kleinste Quotient $q_i = b_i / a_{p,i}$ => Min (600; 300; 250) = 250.
Der Engpass liegt also in der 3.Zeile (Arbeitskräfte-Restriktion) => das ist die Pivot-Zeile.
Im Schnittpunkt Pivot-Spalte/Pivot-Zeile ist das Pivot-Element: $p = x_{23} = 0{,}5$
x_2 wird also Basisvariable, die Schlupfvariable y_3 verlässt die Lösung.

Basis-variable	Linke Seite, Variable					Rechte Seite b(i)	Engpass Quotient q(i)
	x(1)	x(2)	y(1)	y(2)	y(3)		
y(1)	3	2	1	0	0	1200	1200/2 = 600
y(2)	5	10	0	1	0	3000	3000/10=300
y(3)	0	[0,5]	0	0	1	125	125/0,5=250
- G	3	4	0	0	0	0	

Als Pivot-Zeile wählt man also diejenige, bei der gilt: $\min(q_i) = \min\left(\frac{b_i}{a_{pivotspalte,i}}\right)$

Dabei bleiben negative und Quotienten mit Division durch null unberücksichtigt.
(Im 1.Fall würden die Nicht-Negativitäts-Bedingungen verletzt, im 2.Fall "nicht definiert")

2. Tableau 2 (2.Basislösung)

Man fertigt das nächste Tableau, indem man
a) die neue Basisvariable und die normierte Pivot-Zeile einträgt
b) nach dem GAUß-JORDAN-Verfahren die Matrix transformiert
c) in der -G-Zeile prüft, ob die Lösung optimal ist

Wenn es noch $g_j > 0$ gibt, ist wieder nach obiger Methode das Pivot-Element zu bestimmen.
Dann fertigt man das Tableau 3 usw.

3. Bemerkungen zur 2. Basislösung:

$x_2 = 250$ Stück. $x_1 = 0$ Stück.
Gewinn G = 1000 €.
Restkapazität der Maschine $y_1 = 700$ h
Nicht genutzte Rohstoffmenge $y_2 = 500$.
Wir befinden uns am Eckpunkt (0 | 250).

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b_i	q_i
y(1)	3	0	1	0	-4	700	233,3333
y(2)	5	0	0	1	-20	500	100
x(2)	0	1	0	0	2	250	---
- G	3	0	0	0	-8	-1000	

4. Bemerkungen zur 3.Basislösung:

Produktionsprogramm (100 | 250)
Wir befinden uns am Eckpunkt (100 | 250)
Gewinn G = 1300 €.
Restkapazität der Maschine $y_1 = 400$ h.
Nicht genutzte Rohstoffmenge $y_2 = 0$. Personelle Restkapazität $y_3 = 0$ h.
Durch eine Verringerung der Produktionsmenge von Produkt P_2 zugunsten von Produkt P_1 kann die Kapazität der Maschine weiter ausgenutzt werden und damit G weiter erhöht werden.

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b_i	q_i
y(1)	0	0	1	-0,6	8	400	50
x(1)	1	0	0	0,2	-4	100	-25
x(2)	0	1	0	0	2	250	125
- G	0	0	0	-0,6	4	-1300	

3.6 AUFGABE SIMPLEX

Gegeben: konkreten Situation mit Daten zur Fertigung
Gesucht: optimales Fertigungsprogramm $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, G_{max} , Restkapazitäten
Schritte:

1. Ausgangstableau entwickeln

Man setzt die Vorgaben aus der konkreten Situation in ein mathematisches Modell um.
Das mathematische Modell besteht aus m Ungleichungen (Höchstens-Bedingungen) und der Zielfunktion in der Form $-G + g_1x_1 + g_2x_2 + \ldots + g_jx_j + \ldots + g_nx_n = 0$
Man ergänzt die Ungleichungen um m Schlupfvariable y_i und erhält ein Gleichungssystem.
[a_{zs}] sei das Pivot-Element mit der Pivot-Zeile z und der Pivot-Spalte s.
Der doppelte Rahmen soll das Gleichheitszeichen symbolisieren.
Das Simplextableau hat dann folgende Form:

Basis-variable	Entscheidungs-variable x_j: $x_1, x_2, \ldots, x_n$	Schlupf-variable y_i: $y_1, y_2, \ldots, y_m$	Rechte Seiten b_i	Quotienten q_i
y_1 y_2 - - - y_z - - - y_m	$a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1s} \ldots a_{1n}$ $a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2s} \ldots a_{2n}$ - - - $a_{z1}\ a_{z2} \ldots$ **[a_{zs}]** $\ldots a_{zn}$ - - - $a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{ms} \ldots a_{mn}$	1 0 ... 0 0 1 ... 0 - - - 0 0 ... 1 ... 0 - - - 0 0 ... 1	b_1 b_2 - - - b_z - - - b_m	$q_1 = b_1 / a_{1s}$ $q_2 = b_2 / a_{2s}$ - - - $q_z = b_z / a_{zs}$ - - - $q_m = b_m / a$
$-G$	$g_1\ g_2 \ldots g_s \ldots g_n$	0 0 ... 0	0	—

kurz:

BV	(x_j)	(y_i)	b_i	q_i
(y_i)	(a_{ij})	**E**	(b_i)	$\left(\frac{b_i}{a_{is}}\right)$
$-G$	(g_j)	$\vec{o}$	0	–

(Formelsammlung)

2. Pivot-Element wählen

$\max(g_j)$ gibt die Pivot-Spalte s an. $\min(q_i) = \min(b_i / a_{is})$ liefert die Zeile => **[a_{zs}]**
$q_i < 0$ und q_i mit $a_{is} = 0$ bleiben außer Betracht.

3. Basisvariable tauschen mit Hilfe des GAUß-JORDAN-Verfahrens

a) nächstes Tableau mit normierter Pivot-Zeile beginnen; austretende / eintretende Variable.
b) Pivot-Element hat den Wert 1. Mit Zeile i – Eliminationselement a_{is} . Pivot-Zeile entstehen neue Zeilen mit Null-Elementen in der Spalte s.

4. Prüfen auf Optimalität: Das Optimum ist erreicht, wenn alle $g_j \leq 0$
Wenn das Optimum noch nicht erreicht ist, dann wieder mit Schritt 2. weiter optimieren.

5. Ergebnisse

"Produktionsprogramm": die b_i zu den Basisvariablen x_j liefern das Produktionsprogramm.
Die "Rechte Seite" b_{i+1} zu $-G$ gibt den gesamten Deckungsbeitrag (Gewinn) an.
Die "Rechte Seiten" der Schlupfvariable zeigen die nicht-ausgenutzten Kapazitäten an.

3.7 BEISPIEL 3.2

In einem vierstufigen Produktionsprozess werden auf den vier Maschinen R_i drei verschiedene Produkte X_j gefertigt.
Die Bearbeitungszeiten [Stunden, h], die die Produkte auf den Maschinen benötigen und die maximale Kapazitäten [Stunden/Woche] der Maschinen sind in der Tabelle angegeben, ebenso die Stück-Deckungsbeiträge g_j [€ / Stück].

Maschine	Bearbeitungszeiten [Std.] für Produkt X_1	X_2	X_3	Maximale Kapazität [h/Woche]
R_1	1	1	2	28
R_2	2	3	1	50
R_3	1	0	0	12
R_4	0	1	1	13
Deckungsbeitrag	15	6	12	[€ / Stück]

a) Formulieren Sie das mathematische Modell.
b) Entwickeln Sie daraus ein Simplex-Tableau.
c) Bestimmen Sie das Produktionsprogramm, das zum maximalen Gesamt-Deckungsbeitrag führt.
Geben Sie zu den Ergebnissen jeweils die Einheiten an.
Notieren Sie bei jedem Tableau, ob es eine optimale Lösung darstellt (kurze Begründung).
d) In welchem Umfang bleiben bei diesem Produktionsprogramm Kapazitäten ungenutzt?

a) Die Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 erfordern auf der Werkzeugmaschine R_1 die eine Bearbeitungszeit von $x_1 + x_2 + 2x_3$ Stunden . *Diese Summe darf höchstens 28 betragen:*

$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 28$ *als erste Restriktion oder erste Ungleichung.*

Die Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ergeben einen Gesamt-Deckungsbeitrag G:

$15x_1 + 6x_2 + 12x_3 = G$

umformuliert für das Simplex-Tableau: $-G + 15x_1 + 6x_2 + 12x_3 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 28 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 50 \\ x_1 &\le 12 \\ x_2 + x_3 &\le 13 \\ 15x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= G \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 &= 28 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 &= 50 \\ x_1 + y_3 &= 12 \\ x_2 + x_3 + y_4 &= 13 \\ -G + 15x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 0 \end{aligned}}$$

Simplex[3,4] → *Excel / Simplex*

b)

BV	x1	x2	x3	y1	y2	y3	y4	b(i)	q(i)
y1	1	1	2	1	0	0	0	28	
y2	2	3	1	0	1	0	0	50	
y3	1	0	0	0	0	1	0	12	
y4	0	1	1	0	0	0	1	13	
- G	15	6	12	0	0	0	0	0	

c) *Engpassquotienten berechnen*
Wahl des Pivotelements, aktuelle Basisvariablen angeben
JORDAN-Schritte
Optimalitätskriterium prüfen, Kommentar mit Begründung

optimales Produktionsprogramm ablesen: x_1 = 12 Stück, x_2 = 0, x_3 = 8 Stück,
Maximaler Deckungsbeitrag G = 276 €

d) y_2 = 18 d.h. die Restriktion 2 ist nicht voll ausgeschöpft, es stehen noch 18 h zur Verfügung.
y_4 = 5, d.h. die Maschine R4 wird nicht voll ausgenutzt, es stehen noch 5 Stunden zur Verfügung

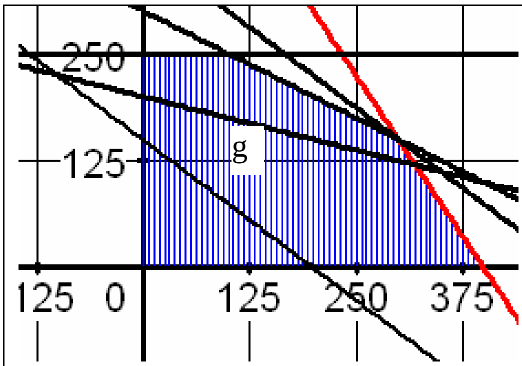
3.8 UNZULÄSSIGE BASISLÖSUNG

1. Das Standardmodell der linearen Optimierung enthält:
   a) m Beschränkungen in Form von Höchstens-Bedingungen (≤ Ungleichungen).
   b) Eine Zielfunktion $G = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j$, wobei G maximal werden soll.
   c) n Nicht-Negativitäts-Bedingungen $x_j \geq 0,\ y_i > 0$.

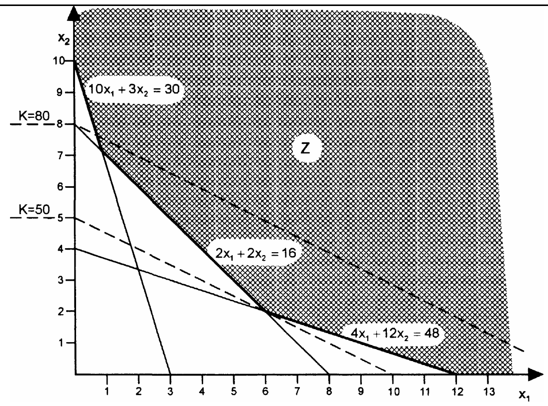
   Sind diese Prämissen verletzt,muss man das Modell in ein Standardmodell umwandeln (1.Phase) und dann die Optimierung mit dem Simplexverfahren durchführen. (Zwei-Phasen-Methode)

2. Die Varianten des Standardmodells: *Teschl S.* 338
   a) Die Zielgröße G, meistens eine Kostensumme K, soll minimal werden (Minimierung).
   b) Einige Beschränkungen liegen als Mindestens-Bedingungen vor (≥ Ungleichungen).
   c) Eine oder mehrere Beschränkungen liegen als Gleichungen vor.

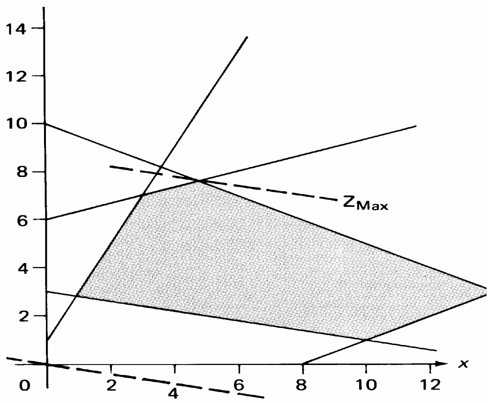
3. Die folgenden Grafiken zeigen Varianten und Entartungen für n = 2.



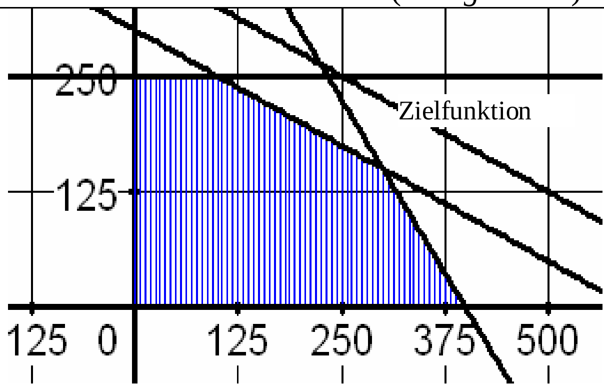
Restriktion mit der Gleichung (g)
$x_1 + 4\,x_2 = 800$



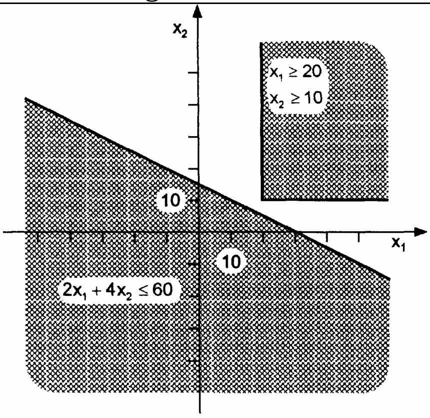
Zielfunktion K → Minimum (*Ellinger S.54*)



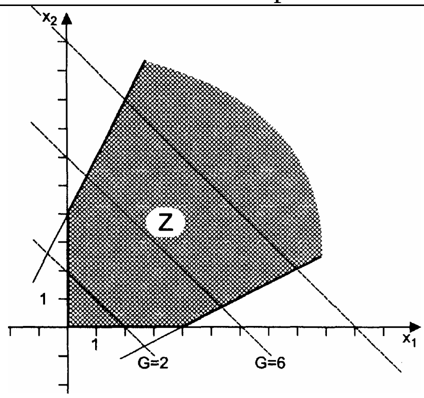
Auswirkung einer Mindest-Bedingung



Zielfunktion parallel zu einer Kante
=> unendlich viele optimale Lösungen



Keine zulässige Lösung (*Ellinger S.53*)



Kein endliches Optimum (*Ellinger S.54*)

3.9 2-PHASEN - MAX-MHG-3,3

Beispiel 3.3

In einem Modul eines Produktionsplanungs- und steuerungssystems gelten folgende Höchstens-, Mindestens- und Gleichungs-Restriktionen:

(1) $4\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 \leq 60$
(2) $2\,x_1 + x_2 - 4\,x_3 \quad \geq 16$
(3) $x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \quad = 10$
$x_1 \geq 0;\quad x_2 \geq 0;\quad x_3 \geq 0;\; y_i > 0.$

(4) Der Gesamt-Deckungsbeitrag $G = 30\,x_1 - 10\,x_2 + 40\,x_3$ soll maximal werden.

Das optimale Fertigungsprogramm für die j Produkte ist zu bestimmen.

Das optimale Fertigungsprogramm ist der Lösungsvektor (x_j) aus dem Simplexverfahren.
Es liegen nicht nur Höchstens-Bedingungen vor, es ist also kein Standardmodell.
In einer ersten Phase muss das Modell in ein Standardmodell umgewandelt werden.

(1) Die 1. Bedingung ist eine Höchstens-Bedingung, sie wird unverändert übernommen.
(2) Die 2. Bedingung ist eine Mindestens-Bedingung, sie wird in eine Höchstens-Bedingung umgewandelt, indem man die Ungleichung mit (-1) multipliziert:
$2\,x_1 + x_2 - 4\,x_3 \quad \geq 16 \;\|.(-1)$ p $-2\,x_1 - x_2 + 4\,x_3 \; < -16$
(3) Die 3. Bedingung ist eine Gleichungsbedingung.
Deren Schlupfvariable muss also zwingend null werden. Das muss als Erstes erfolgen.
(4) Maximierung: die Zielfunktion wird wie beim Standardmodell behandelt.

gegeben:		transformiert:		mit Schlupfvariablen:
$4x_1+2x_2+2x_3 \leq 60$		$4x_1+2x_2+2x_3 \leq 60$		$4x_1+2x_2+2x_3+y_1=60$
$2x_1+x_2-4x_3 \geq 16$	$\Rightarrow$	$-2x_1-x_2+4x_3 \leq -16$	$\Rightarrow$	$-2x_1-x_2+4x_3+y_2=-16$
$x_1+2x_2+4x_3=10$		$x_1+2x_2+4x_3=10$		$x_1+2x_2+4x_3+w=10$
$G=30x_1-10x_2+40x_3$		$-G+30x_1-10x_2+40x_3=0$		$-G+30x_1-10x_2+40x_3=0$

Die erste Basislösung $x_j = 0$ (am Ursprung (0|0|0)) ist unzulässig:
Setzt man in der 2.Zeile $x_j = 0$ ergibt sich $y_2 = -16$
Setzt man in der 3.Zeile $x_j = 0$ ergibt sich $w = 10$
Die Basislösung ist nicht zulässig, solange die Schlupfvariable ***w* n 0** ist
und solange es negative Elemente der "rechten Seite" gibt, d.h. wenn mindestens in $\mathbf{b_i < 0}$.

In der 1.Lösungsphase

entwickelt man mit den üblichen Simplex-Transformationen eine zulässige Lösung.

1. Als Erstes wählt man ein Pivot-Element aus der "w-Zeile". Dadurch wird die Schlupfvariable w aus der Basislösung entfernt und sie darf auch nicht mehr in diese zurückkehren. Die Schlupfvariable w ist also als Basisvariable gesperrt (Gesperrte Schlupfvariable w_k).
2. Damit die Werte b_i positiv werden, müssen die Pivot-Elemente müssen negativ sein. Man wählt ein Pivot-Element aus der Zeile mit $min(b_i)$ (das "negativste" b_i !). Mit dieser Wahl werden meistens gleich mehrere b_i positiv. Die Auswahl eines von mehreren negativen Pivot-Elementen ist aber prinzipiell beliebig Eine zulässige Basislösung ist erreicht, wenn alle Werte b_i positiv sind.
3. Wenn man mehrere gleichwertige Wahlmöglichkeiten hat, wählt man das Pivot-Element mit maximalem g_j.

Die 2.Lösungsphase

ist ein Simplexverfahren, es beginnt, wenn die Basislösung zulässig ist. → *Excel / Simplex*

3.10 2-Phasen - Min-MH-3,3

Bei einem typischen Mischungsproblem ist eine Mischung aus Ausgangsstoffen gesucht, die minimale Gesamtkosten $K = - G$ verursachen.

Beispiel 3.4
Bei einem Mischungsproblem liegen folgende Mindest- und Höchstbedingungen vor:

(1) $2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 \geq 60$
(2) $3\,x_1 + 2\,x_3 \geq 40$
(3) $2\,x_1 + x_2 + 5\,x_3 \leq 50$
$x_1 \geq 0;\quad x_2 \geq 0;\quad x_3 \geq 0;\quad y_i > 0$
(4) Für die Summe der Kosten K gilt $K = - G = 34\,x_1 + 8\,x_2 + 16\,x_3 \rightarrow$ Minimum.

Die gesuchten Mengen x_j sind die benötigten Mengen der Ausgangsstoffe.
Der Lösungsvektor (x_j) aus dem Simplexverfahren zeigt die optimale Mischung.

(1) die 1.Bedingung ist eine Mindest-Bedingung, sie wird in eine Höchstens-Bedingung umgewandelt, indem man die Ungleichung mit (-1) multipliziert:
$2\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 \geq 60 \;\|.(-1)$ p $-2\,x_1 - 4\,x_2 - x_3 < -60$
(2) Entsprechendes gilt für die 2.Bedingung:
$3\,x_1 + 2\,x_3 > 40 \;\|.(-1)$ p $-3\,x_1 - 2\,x_3 < -40$
(3) die Höchstens-Bedingung wird unverändert übernommen.
(4) in der Zielfunktion entspricht der minimalen Kostensumme K dem Maximum von $-G$.
Die Gleichung der Zielfunktion formt man wieder so um, dass die rechte Seite null ist:
$-G = 34\,x_1 + 8\,x_2 + 16\,x_3$ p $-G - 34\,x_1 - 8\,x_2 - 16\,x_3 = 0$

gegeben:		transformiert:		mit Schlupfvariablen:
$2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 60$		$-2x_1 - 4x_2 - x_3 \leq -60$		$-2x_1 - 4x_2 - x_3 + y_1 = -60$
$3x_1 + 2x_3 \geq 40$	$\Rightarrow$	$-3x_1 - 2x_3 \leq -40$	$\Rightarrow$	$-3x_1 - 2x_3 + y_2 = -40$
$2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 50$		$2x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 50$		$2x_1 + x_2 + 5x_3 + y_3 = 50$
$-G = 34x_1 + 8x_2 + 16x_3$		$-G - 34x_1 - 8x_2 - 16x_3 = 0$		$-G - 34x_1 - 8x_2 - 16x_3 = 0$

Die Basislösung ist nicht zulässig,
solange es negative Elemente der "rechten Seite" gibt, d.h. wenn mindestens in $\mathbf{b_i} < \mathbf{0}$.
Gleichungsrestriktionen mit gesperrten Schlupfvariable ***w*** sind hier nicht vorhanden.
2-Phasen-Typ Min-MH-3,3

In der 1.Lösungsphase
entwickelt man mit den üblichen Simplex-Transformationen eine zulässige Lösung.

1. Damit die Werte b_i positiv werden, müssen die Pivot-Elemente müssen negativ sein.
   Man wählt ein Pivot-Element aus der Zeile mit $min(b_i)$ (das "negativste" b_i !).
   Mit dieser Wahl werden meistens gleich mehrere b_i positiv.
   Die Auswahl eines von mehreren negativen Pivot-Elementen ist aber prinzipiell beliebig
   Eine zulässige Basislösung ist erreicht, wenn alle Werte b_i positiv sind.
2. Wenn man mehrere gleichwertige Wahlmöglichkeiten hat,
   wählt man das Pivot-Element mit maximalem g_j.

Die 2.Lösungsphase
ist ein Simplexverfahren, es beginnt, wenn die Basislösung zulässig ist.

→ *Excel / Simplex*

3.11 Zwei-Phasen, Checklist

Aufgabe Zwei-Phasen-Methode

Gegeben: Ein Nichtstandard-Modell

Gesucht: Optimale Kombination $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, G_{max} bzw. $-G_{min}$

Genau zwei Aufgabentypen:

a) **2-Phasen Max-MHG-3,3** Mindest-, Höchstens-, Gleichungs-, 3 Variable, 3 Bedingungen

b) **2-Phasen Min-MH-3,3** Mindest-, Höchstens-Bedingung, 3 Variable, 3 Bedingungen

Schritte:

1. Bedingungen und Zielfunktion auf Verletzung des Simplex-Standards prüfen

   a) Zielfunktion Kostensumme wie $K = -G = 30\,x_1 + 20\,x_2 \quad \to$ Minimum
   => Gleichung wie $-G - 30\,x_1 - 40\,x_2 = 0$
   formal: $-G \ldots = 0$

   b) Gleichungsbedingungen wie $2\,x_2 + x_3 = 8 \quad \| + w$ (zwingend $w = 0$)
   => Gleichungen wie $2\,x_2 + x_3 \quad \ldots + w = 8$
   mit gesperrten Schlupfvariablen w

   c) Mindestbedingungen wie $2\,x_1 + 6\,x_2 \geq 420 \quad \| \cdot(-1)$
   => Gleichungen wie $-2\,x_1 - 6\,x_2 + y_3 = -420$
   mit negativen b_i

   Eine zulässige Basislösung ist erreicht, wenn alle $w_k = 0$ und kein b_i negativ ist.

2. Wahl der Pivot-Elemente (Prioritätsreihenfolge beachten!)

   (1) Restriktionsgleichungen führen zu gesperrten Schlupfvariablen w.
   Diese müssen zuerst aus der Basislösung entfernt werden (null werden, $w = 0$).
   Man beginnt also mit der (einer) "w-Zeile".
   Die Pivot-Spalte wählt man möglichst so, dass kein weiteres b_i negativ wird.
   Wenn man die Wahl hat, wählt die Pivot-Spalte so, dass g_j möglichst groß ist.

   (2) Mindestbedingungen führen zu negativen b_i.
   Diese müssen positiv werden, damit die Basislösung zulässig wird.
   Man beginnt mit der "b-Zeile", die das niedrigste (das "negativste") b_i hat.
   Die Pivot-Spalte wählt man so, dass das Pivot-Element negativ ist.
   Wenn es mehrere solcher Pivot-Spalten gibt, wählt man diejenigen mit maximalem g_j.

   (3) Wenn alle $w_k = 0$ und kein $b_i < 0$, dann ist die Basislösung zulässig,
   dann ist die 1.Lösungsphase beendet, die Simplex-Standard-Bedingungen sind erreicht.
   Es beginnt die 2. Lösungsphase

   (4) Ab jetzt wählt man zuerst die Pivot-Spalte und zwar diejenige mit maximalem g_j.

   Dann die Pivot-Zeile mit kleinstem Quotient $\boxed{\min(q_i) = \min\left(\frac{b_i}{a_{pivotspalte,i}}\right)}$

3.12 FONDS-OPTIMIERUNG

Eine weitere Übung für den Aufgabentyp 2-Phasen Max – MHG

Beisp. 3.5 Fonds-Optimierung (nach *Gohout* S.53)
Ein Fondsmanager kann für seinen Fonds Aktien aus drei Branchen kaufen. x_j bezeichne den Anteil des Fondsvermögens, den er für Aktien der Branche j ausgeben soll (j =1;2;3). x_4 stellt den Anteil liquider Mittel des Fonds dar. Die Zusammensetzung der Wertanteile des Fonds ergibt sich damit

zu $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ (1 = 100 %)

Der Fondsmanager muss sich an vier Regeln bei der Zusammensetzung seines Fonds halten:

1. Der Wertanteil der Branchen 1 und 2 darf zusammen 75% nicht überschreiten.
   Daraus ergibt sich die Höchstens-Bedingung $x_1 + x_2 \leq 0{,}75$
2. Der Wertanteil der Branche 3 soll mindestens 20% (Prozentpunkte) größer sein als der von Branche 1, also $x_3 > x_1 + 0{,}2$ p $-x_1 + x_3 > 0{,}2$, eine Mindestens-Bedingung
3. Der gesamte Aktienanteil des Fonds-Vermögens soll mindestens 80% betragen.
   Daraus ergibt sich die Mindest-Bedingung $x_1 + x_2 + x_3 \geq 0{,}8$
4. Der Liquiditätsanteil soll mindestens 5% betragen.
   Daraus ergibt sich die Mindest-Bedingung $x_4 \geq 0{,}05$

Die optimale Anlagestrategie besteht nun darin, die durchschnittliche Rendite für die nächste Planungsperiode zu maximieren: G_{max}.

Für die drei Branchen erwartet er Renditen von 10%, 15% und 20%.
Für die liquiden Mittel setzt er eine Rendite von 2% an.
Daraus ergibt sich die Zielfunktion $G = 0{,}1\,x_1 + 0{,}15\,x_2 + 0{,}2\,x_3 + 0{,}02\,x_4 \rightarrow$ Maximum
=> $-G + 0{,}1\,x_1 + 0{,}15\,x_2 + 0{,}2\,x_3 + 0{,}02\,x_4 = 0$

Die optimale Anlagestrategie und die maximale Durchschnittsrendite sind zu bestimmen.

Das mathematische Modell: → *Excel / 2-Phasen*

gegeben:	transformiert	mit Schlupfvariablen
$x_1 + x_2 \leq 0{,}75$	$x_1 + x_2 \leq 0{,}75$	$x_1 + x_2 + y_1 = 0{,}75$
$-x_1 + x_3 > 0{,}2$	$x_1 - x_3 \leq -0{,}2$	$x_1 - x_3 + y_2 = -0{,}2$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 0{,}8$	$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -0{,}8$	$-x_1 - x_2 - x_3 + y_3 = -0{,}8$
$x_4 \geq 0{,}05$	$-x_4 \leq -0{,}05$	$-x_4 + y_4 = -0{,}05$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + w_1 = 1$
$G = 0{,}1\,x_1 + 0{,}15\,x_2 \ldots$	$-G + 0{,}1\,x_1 + 0{,}15\,x_2 \ldots$	$-G + 0{,}1\,x_1 + 0{,}15\,x_2 \ldots$

BV	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	y(1)	y(2)	y(3)	y(4)	w(1)	b(i)
y(1)	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0,75
y(2)	1	0	-1	0	0	1	0	0	0	-0,2
y(3)	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	0	-0,8
y(4)	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	-0,05
w(1)	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
- G	0,1	0,15	0,2	0,02	0	0	0	0	0	0
y(1)	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0,75
y(2)	2	1	0	1	0	1	0	0	1	0,8
y(3)	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0,2
y(4)	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	-0,05
x3	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
- G	-0,1	-0,05	0	-0,18	0	0	0	0	-0,2	-0,2
y(1)	1	1	0	0	1	0	0	0		0,75
y(2)	2	1	0	0	0	1	0	1		0,75
y(3)	0	0	0	0	0	0	1	1		0,15
x4	0	0	0	1	0	0	0	-1		0,05
x3	1	1	1	0	0	0	0	1		0,95
- G	-0,1	-0,05	0	0	0	0	0	-0,18		-0,191

Gesperrte Variable w_1 muss zuerst die Basislösung verlassen.

Wahl der Pivot-Spalte ist eigentlich beliebig.

Optimale Anlagestrategie in diesem Fall: $x_1 = 0$. $x_2 = 0$. $x_3 = 0{,}95 = 95\%$.
Liquide Mittel $x_4 = 0{,}05 = 5\%$.
Maximale Durchschnittsrendite $G = 0{,}191 = 19{,}1\ \%$

3.15 ZUORDNUNGSPROBLEME

Das Zuordnungsproblem ist ein Spezialfall der linearen Optimierung.
Hierbei werden die Ausgangsorte A_i "eins zu eins" den Bestimmungsorten B_j zugeordnet.
Bei Zuordnungsproblemen sollen *m* Ausgangselemente A_i (Ressourcen, Mittel, Personen, Maschinen usw.) so auf *n* Aufgaben B_j verteilt werden, dass die Gesamtkosten minimal werden.

Typische Zuordnungsprobleme sind:
Zuordnung von Personen auf Arbeitsplätze, Räume, Fahrzeuge usw.
Zuordnung von Lehrpersonen auf Personengruppen ("Stundenpläne").
Transport von einzelnen Stücken zwischen Ausgangs- und Bestimmungsorten.
Zuordnung von Kränen auf Baustellen, von Piloten auf Flugzeuge usw.
Zuordnungsprobleme nennt man auch 1:1-Zuweisungsprobleme (Assignment Problems).

Wegen der Eindeutigkeit der Zuordnungen ist die Anzahl der Ressourcen gleich der Anzahl der Aufgaben: $m = n$. Die Anzahl der Basisvariablen ist $m = n$.

Die Zielfunktion ist. $C_{gesamt} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow \text{Minimum}$

Die Ressourcenbedingungen und Aufgabenbedingungen: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1.$ $\quad \sum_{1=1}^{n} x_{ij} = 1$

Die Mengen x_{ij} können nur entweder vorhanden sein oder nicht: $x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

<u>Beisp. 3.8</u>
Ein Logistik-Unternehmen hat in 5 Städten je einen leeren Container und benötigt in 5 anderen Städten je einen solchen Container. Wie muss man die Container dirigieren, damit die gesamte Wegstrecke (in 100 km) und damit der Transportkostenaufwand möglichst klein bleibt?

Entfernungsmatrix $\quad (c_{ij}) = \begin{array}{c|ccccc} von \backslash nach & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ \hline A_1 & 8 & 3 & 11 & 13 & 16 \\ A_2 & 2 & 8 & 17 & 2 & 7 \\ A_3 & 12 & 9 & 4 & 4 & 6 \\ A_4 & 5 & 11 & 9 & 7 & 14 \\ A_5 & 6 & 8 & 9 & 3 & 13 \end{array}$

<u>Die optimale Zuordnung erhält man schrittweise über die Optimierungsschritte:</u>

1. Prüfen, ob die 1. Basislösung optimal ist (Optimalitätskriterium).
2. Weitere Optimierungsschritte, wenn nicht optimal.
3. Wieder prüfen, ob die gegebene Basislösung optimal ist… usw.

3.16 Prüfung auf Optimalität

Kosten-Matrizen kann man mit Subtraktionen in Zeilen und Spalten reduzieren:
Subtrahiert man in der Kostenmatrix (c_{ij}) von allen Werten einer Zeile i einen festen Wert, so ändern sich die Transportkosten c_{ij} vom Ausgangsort A_i zum Bestimmungsort B_j nur absolut, die Kostenrelationen zwischen den verschiedenen Transportmöglichkeiten bleiben erhalten.
Für die Nachfrager an den Bestimmungsorten B_j bleiben die Angebote relativ gleich teuer.
Dasselbe gilt, wenn man von einer Spalte j einen bestimmten Wert subtrahiert.
Durch eine solche Reduktion der Kostenmatrix ändert sich also die Optimallösung nicht.

Im Rahmen der Matrizenrechnung lässt sich zeigen:
Satz 1. Das Verteilungsproblem bleibt unverändert, wenn man die Elemente irgendeiner Zeile oder Spalte der Kostenmatrix um den gleichen Wert vergrößert oder verringert.

Matrix-Reduktion
1. Das kleinste Element aus jeder Zeile wird von allen Elementen dieser Zeile subtrahiert; dadurch wird in jeder Zeile mindestens ein Element null. (Zeilenreduktion)
2. Das kleinste Element aus jeder Spalte wird von allen Elementen dieser Spalte subtrahiert; dadurch wird in jeder Spalte mindestens ein Element Null. (Spaltenreduktion)
3. Man erhält die reduzierte Matrix (r_{ij}) ; dabei wird kein Element negativ $r_{ij} \geq 0$.

nach der Zeilenreduktion:
Zwischenergebnis:

von i \ nach j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	0	8	10	13
A_2	0	6	15	0	5
A_3	8	5	0	0	2
A_4	0	6	4	2	9
A_5	3	5	6	0	10

nach der Spaltenreduktion: (Spalte 5)
Reduzierte Matrix (r_{ij}) :

von i \ nach j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	0	8	10	11
A_2	0	6	15	0	3
A_3	8	5	0	0	0
A_4	0	6	4	2	7
A_5	3	5	6	0	8

Zulässige Basislösung
Zulässige Lösungen für Zuordnungsprobleme haben genau n Eins-Elemente in unabhängiger Anordnung, d.h. jedes Eins-Element darf in einer Zeile oder Spalte nur einmal vorkommen.

Die nebenstehende Matrix stellt eine zulässige, jedoch nicht optimale Verteilung dar.
Es gibt n! = 5! = 120 zulässige Verteilungen.
Die Matrix ist eine Permutationsmatrix.

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} von \backslash nach & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ \hline A_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Optimalitätskriterium
In der reduzierten Matrix (r_{ij}) stellen die Null-Elemente Felder mit den niedrigsten Kosten dar.
Unabhängige Null-Elemente $r_{ij} = 0$ könnte man mit Eins-Elementen $x_{ij} = 1$ besetzen, aber in der reduzierten Matrix gibt es unabhängige und abhängige Nullelemente.
Nur Null-Elemente die in einer Spalte oder Zeile nur einmal vorkommen, sind unabhängig.

Es lässt sich zeigen:
Satz 2: Die Zuordnung ist optimal, wenn n unabhängige Null-Elemente mit Einsen besetzt sind.

3.17 DECKLINIEN-METHODE

Die Null-Elemente in einer reduzierten Matrix sind in größeren Zuordnungsmodellen nicht leicht als abhängig oder unabhängig zu erkennen. Deshalb nimmt man dazu den Satz von der Anzahl der Decklinien zu Hilfe:

> *Satz 3: Enthält eine Matrix Null-Elemente, so ist die maximale Anzahl der davon auswählbaren unabhängigen Null-Elementen gleich der minimalen Anzahl der Linien, mit denen man alle Null-Elemente bedecken kann.*
> ***max. Anzahl unabhängiger Null-Elemente = min. Anzahl der Decklinien***
> (Satz 3 wurde von den ungarischen Mathematikern D. König und E. Egerváry formuliert und 1916 bewiesen. Man spricht deshalb auch von der Ungarischen Methode)

Man prüft eine vorhandene reduzierte Matrix (r_{ij}) auf Optimalität in folgenden Schritten:

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	[0]	8	10	11
A_2	0	6	15	0	3
A_3	8	5	[0]	0	0
A_4	[0]	6	4	2	7
A_5	3	5	6	[0]	8

1. Man markiert Null-Elemente derart, dass jede Zeile und jede Spalte nur eine Zuordnung erhält. Zeichen [ ]
   Es gibt mehrere Möglichkeiten.
   Man bevorzugt unabhängige Null-Elemente, z.B. r_{12}
   Bis $n = 8$ kann man die Anzahl u der unabhängigen Null-Elemente leicht erkennen.

2. Mit u Decklinien (hier grau schattiert) kann man alle alle Null-Elemente überdecken. Zum Eintragen dieser minimalen Anzahl von Decklinien gibt es einen Algorithmus. Bei Zuordnungsproblemen bis $n = 8$ kann man diesen vernachlässigen.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	[0]	8	10	11
A_2	0	6	15	0	3
A_3	8	5	[0]	0	0
A_4	[0]	6	4	2	7
A_5	3	5	6	[0]	8

3. In diesem Beispiel gibt es $u = 4$ unabhängige Null-Elemente. Mit 4 Decklinien lassen sich alle Null-Elemente über decken. In der optimalen Zuordnung werden jedoch 5 unabhängige Null-Elemente gefordert. Es liegt noch kein Optimum vor.

4. Für Zuordnungsprobleme bis $n = 8$ werden die Decklinien nicht eingetragen um die Anzahl u zu ermitteln, sondern um schrittweise die Basisvariablen umzubelegen, bis das Optimum erreicht ist.

3.18 Optimierungsschritte

Ausgehend vom niedrigsten nicht-überdeckten Element $\min(r_{ij})$ (der reduzierten Stückkosten) werden die übrigen Elemente umgerechnet (Matrixtransformation):

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	5	[0]	8	10	11
A_2	0	6	15	0	3
A_3	8	5	[0]	0	0
A_4	[0]	6	4	2	7
A_5	3	5	6	[0]	8

1. $\min(r_{ij}) = r_{25} = 3$ wird von allen nicht-überdeckten Elementen subtrahiert.
2. $\min(r_{ij}) = r_{25} = 3$ wird zu allen doppelt-überdeckten (an Kreuzungspunkten) Elementen addiert. (rot)
3. Die nur einmal überdeckten Elemente bleiben unverändert.
4. Mit der Matrixtransformation entstehen neue Null-Elemente (hier im Feld (2|5)), die jetzt als Zuordnung verwendet werden können.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	[0]	8	13	11
A_2	0	3	12	0	0
A_3	11	5	[0]	3	0
A_4	[0]	3	1	2	4
A_5	3	2	3	[0]	5

5. Man prüft nun mit der Decklinien-Methode die neue Matrix auf Optimalität. Nach Einfügen der Zuordnung $r_{25} = 0$ erkennt man 5 unabhängige Null-Elemente. Man benötigt 5 Decklinien um alle Null-Elemente überdecken zu können.
   Damit ist die optimale Zuordnung gefunden.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	8	[0]	8	13	11
A_2	0	3	12	0	[0]
A_3	11	5	[0]	3	0
A_4	[0]	3	1	2	4
A_5	3	2	3	[0]	5

6. Die Zuordnung lässt sich mit einer reinen Mengenmatrix veranschaulichen:
   d.h. 1 Container wird von A_4 nach B_1 geliefert,
   1 Container wird von A_1 nach B_2 geliefert,
   usw.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1		1			
A_2					1
A_3			1		
A_4	1				
A_5				1	

7. Mit der ursprünglichen Entfernungsmatrix (c_{ij}) lässt sich die Summe der insgesamt zurückzulegenden Strecken bestimmen: 2200 km.

i \ j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1		3			
A_2					7
A_3			4		
A_4	5				
A_5				3	

Mathematische Herleitungen zum Zuordnungsproblem finden Sie in Churchman, u.a., Operations Research, Wien 1971.

3.19 Varianten der Zuordnungen

Wie beim Simplexverfahren gibt es auch bei Zuordnungsproblemen Ausgangssituationen bei denen ein oder mehrere Prämissen verletzt sein.

Variante 1 Maximierung statt Minimierung Maximiere $G_{gesamt} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_{ij}$

Die Basisvariable sind dann Deckungsbeiträge (Stückgewinne) g_{ij}.
Um ein solches Zuordnungsproblem mit der Ungarischen Methode lösen zu können, muss man es in ein Minimierungsproblem überführen. Dazu bildet man eine Komplementärmatrix (c_{ij}), die einfach durch Subtraktion von einer entsprechend großen Konstanten k erstellt wird:
Die Matrixelemente sind dann bestimmt durch $c_{ij} = k - g_j$.
Aus hohen Deckungsbeiträgen werden dadurch kleine "Kosten" (negative Deckungsbeiträge) und aus niedrigeren Deckungsbeiträgen entsprechend höhere "Kosten".

Variante 2 Gesamte Angebotsmenge ≠ gesamte Bedarfsmenge z.B. $\sum a_i > \sum b_j$
Dann führt man zusätzliche, fiktive Bestimmungsorte in das Modell ein.

Beisp. 3.9 enthält beide Varianten (*Runzheimer*, S.165)
Für besondere Verkaufsaktionen stehen einem Unternehmen der Konsumgüterindustrie 7 Mitarbeiterteams A_i zur Verfügung. Die Mitarbeiterteams können zur Zeit nur auf fünf attraktiven Verkaufsflächen (in entsprechenden Einkaufszentren) B_j tätig werden. Aus den bisherigen Verkaufsaktionen kennt man die Deckungsbeiträge, die die Teams auf den Verkaufsflächen erzielt haben. Man erwartet, dass diese Erfahrungswerte am besten die Leistung messen. In der untenstehenden Matrix sind die Deckungsbeiträge g_{ij} [€/Stunden] zusammengestellt.

nach j	Verkaufsflächen					fiktive	
von i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
Team A_1	180	200	160	135	225	0	0
Team A_2	170	180	165	150	230	0	0
Team A_3	200	185	150	165	195	0	0
Team A_4	190	200	140	135	190	0	0
Team A_5	220	210	130	175	200	0	0
Team A_6	195	215	145	180	175	0	0
Team A_7	205	175	155	160	195	0	0

Die fiktiven Verkaufsflächen können nicht besetzt werden, also sind die Deckungsbeiträge null.
Ziel ist den maximalen Gesamtdeckungsbeitrag zu erzielen.
Um das Modell als Minimierungsproblem lösen zu können, bilden wir durch Subtraktionen eine Komplementärmatrix, z.B. mit der Konstanten k = 300: $c_{ij} = 300 - g_{ij}$

nach j	Verkaufsflächen					fiktive	
von i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
Team A_1	120	100	140	165	75	300	300
Team A_2	130	120	135	150	70	300	300
Team A_3	100	115	150	135	105	300	300
Team A_4	110	100	160	165	110	300	300
Team A_5	80	90	170	125	100	300	300
Team A_6	105	85	155	120	125	300	300
Team A_7	95	125	145	140	105	300	300

Nun lässt sich das Problem mit Hilfe der Matrixreduktion und der Ungarischen Methode lösen.
→ Excel / Zuordnung

3.20 ZUORDNUNGSAUFGABE

Aufgabe Zuordnung

Gegeben: Matrix der Kosten c_{ij} oder der Deckungsbeiträge g_{ij}
Standardproblem oder Variante 1 oder Variante 2

Gesucht: Optimale Zuordnung

Schritte:

1. Bei Variante 1 Komplementärmatrix mit den Elementen $c_{ij} = k - g_j$ bilden.
   Bei Variante 2 fiktive Spalten hinzufügen
2. Matrixreduktion ausführen
3. Auf Optimum prüfen
   Unabhängige Null-Elemente suchen und markieren.
   Anzahl der unabhängigen Null-Elemente $u = n$? Optimum erreicht, wenn $u = n$.
4. Optimierungsschritte:
   Alle Null-Elemente mit der minimalen Anzahl Decklinien überdecken.
   Das minimale Element der nicht-überdeckten $\min(r_{ij})$ von den nicht-überdeckten subtrahieren.
   $\min(r_{ij})$ zu den doppelt-überdeckten Elementen addieren.

   Zum Schleifenbeginn bei 3.

3.20A Vier Algorithmen beim Zuordnungsproblem

1. Reduktion der Kostenmatrix durch Subtraktion der Zeilen- und Spaltenminima:

$$\begin{pmatrix} 3&4&5&4&6\\ 4&4&2&3&6\\ 5&1&6&5&1\\ 6&7&7&10&8\\ 4&5&3&5&6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3&4&5&4&6\\ 4&4&2&3&6\\ 5&1&6&5&1\\ 6&7&7&10&8\\ 4&5&3&5&6 \end{pmatrix}\begin{matrix} 3\\ 2\\ 1\\ 6\\ 3 \end{matrix} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0&1&2&1&3\\ 2&2&0&1&4\\ 4&0&5&4&0\\ 0&1&1&4&2\\ 1&2&0&2&3 \end{pmatrix}\\ \begin{matrix} 0&0&0&1&0 \end{matrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0&1&2&0&3\\ 2&2&0&0&4\\ 4&0&5&3&0\\ 0&1&1&3&2\\ 1&2&0&1&3 \end{pmatrix}$$

2. Maximale Anzahl unabhängiger Null-Elemente (also keine Zeile oder Spalte gemeinsam haben)
Man sucht eine Zeile oder Spalte mit minimaler Anzahl Null-Elemente, markiert eine Null und entfernt alle anderen in der gleichen Zeile und Spalte p maximale Anzahl.

$$\begin{pmatrix} 0&1&2&0&3\\ 2&2&&0&4\\ 4&0&5&3&0\\ 0&1&1&3&2\\ 1&2&0&1&3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&1&2&0&3\\ 2&2&&0&4\\ 4&0&5&3&\\ 0&1&1&3&2\\ 1&2&0&1&3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&1&2&&3\\ 2&2&&0&4\\ 4&0&5&3&\\ 0&1&1&3&2\\ 1&2&0&1&3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&1&2&&3\\ 2&2&&0&4\\ 4&0&5&3&\\ &1&1&3&2\\ 1&2&0&1&3 \end{pmatrix}$$

3. Minimale Anzahl von Decklinien, die alle Null-Elemente überdecken.
Diese Anzahl ist stets gleich der maximalen Anzahl unabhängiger Null-Elemente ("rote Nullen")
(1) Markiere jede Zeile, die keine markierte, rote 0 besitzt durch ein rotes Kreuz : .
(2) Markiere ebenso jede Spalte, die eine gelöschte 0 in einer bereits markierten Zeile enthält.
(3) Markiere jede Zeile, die eine markierte 0 in einer bereits markierten Spalte enthält.

$$\begin{array}{ccccc|c} 0&1&2&&3&\\ 2&2&&0&4&\\ 4&0&5&3&&\\ &1&1&3&2&\times\\ 1&2&0&1&3& \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} \times&&&&&\\ \hline 0&1&2&&3&\\ 2&2&&0&4&\\ 4&0&5&3&&\\ &1&1&3&2&\times\\ 1&2&0&1&3& \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc|c} \times&&&&&\\ \hline 0&1&2&&3&\times\\ 2&2&&0&4&\\ 4&0&5&3&&\\ &1&1&3&2&\times\\ 1&2&0&1&3& \end{array}$$

(4) Wiederhole die Schritte 2 und 3 solange, bis keine weitere Zeile/Spalte markiert werden kann

$$\begin{array}{ccccc|c} \times&&&\times&&\\ \hline 0&1&2&&3&\times\\ 2&2&&0&4&\\ 4&0&5&3&&\\ &1&1&3&2&\times\\ 1&2&0&1&3& \end{array} \quad \begin{array}{ccccc|c} \times&&&\times&&\\ \hline 0&1&2&&3&\times\\ 2&2&&0&4&\times\\ 4&0&5&3&&\\ &1&1&3&2&\times\\ 1&2&0&1&3& \end{array} \quad \begin{array}{ccccc|c} \times&&\times&\times&&\\ \hline 0&1&2&&3&\times\\ 2&2&&0&4&\times\\ 4&0&5&3&&\\ &1&1&3&2&\times\\ 1&2&0&1&3& \end{array} \quad \begin{array}{ccccc|c} \times&&\times&\times&&\\ \hline 0&1&2&&3&\times\\ 2&2&&0&4&\times\\ 4&0&5&3&&\\ &1&1&3&2&\times\\ 1&2&0&1&3&\times \end{array}$$

(5) Decklinie auf jede Zeile, die nicht markiert wurde und auf jede Spalte, die markiert wurde.

$$\begin{array}{ccccc|c} \times&&\times&\times&&\\ \hline 0&1&2&&3&\times\\ 2&2&&0&4&\times\\ 4&0&5&3&&\\ &1&1&3&2&\times\\ 1&2&0&1&3&\times \end{array}$$

4. Die Kostentransformation siehe Abschnitt 3.18

3.21 TRANSPORTPROBLEM

Beisp. 3.10 Transporte (vgl. *Runzheimer* S.133)

Ein Unternehmen produziert das gleiche Produkt an 3 Ausgangsorten A_1, A_2, A_3 in den Angebotsmengen a_i : $a_1 = 150$, $a_2 = 30$, $a_3 = 120$ Mengeneinheiten (z.B. Stück, t, 1000 St.)
An den 4 Bestimmungsorten B_1, B_2, B_3, B_4 bestehen die Bedarfsmengen b_j : $b_1 = 80$, $b_2 = 30$, $b_3 = 60$, $b_4 = 130$ Einheiten dieses Produkts.
Die Transportkosten um 1 Einheit vom Ausgangsort A_i zum Bestimmungsorts B_j zu befördern sind je nach Transportweg verschieden: Transportstückkosten: c_{ij} [€/Einheit] [€/E].

Während der Planungsperiode sollen die Produkte so transportiert werden, dass die gesamten Transportkosten minimal werden.
Die optimalen Transportmengen x_{ij} sind zu bestimmen.

3 Prämissen: gleiche Produkte, gleiche Produktionskosten, $\sum a_i = \sum b_j = 300$.

Transportmengenmatrix $\mathbf{X} = (x_{ij})$

Bestimmungsorte

von \ nach	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	150
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	30
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	120
b_j	80	30	60	130	300

Matrix der Transportstückkosten $\mathbf{C} = (c_{ij})$ [€/E]

Bestimmungsorte

von \ nach	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	34	23	30	22	150
A_2	40	41	47	28	30
A_3	28	26	38	21	120
b_j	80	30	60	130	300

Das mathematische Modell für dieses Problem:

Zielfunktion: Minimiere $C_{\text{gesamt}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

$34x_{11} + 23x_{12} + 30x_{13} + 22x_{14} + 40x_{21} + 41x_{22} + 47x_{23} + 28x_{24} + 28x_{31} + 26x_{32} + 38x_{33} + 21x_{34}$

unter den Nebenbedingungen (Restriktionen, restricts):

Angebotsgleichungen:
$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30$
$x_{31} + x_{132} + x_{33} + x_{34} = 120$

Bedarfsgleichungen:
$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130$

und den Nichtnegativitätsbedingungen: $x_{ij} \geq 0$ für alle i und j (keine negativen Liefermengen)

Die 12 "Unbekannten" x_{ij} ergeben sich also in diesem Fall aus einem mathematischen Modell, das aus 8 linearen Gleichungen und 12 Ungleichungen besteht.

Allgemein: Ausgangsorte $i = 1, 2, \ldots, m$ Bestimmungsorte $j = 1, 2, \ldots, n$
$m + n$ Gleichungen, $m \cdot n$ unbekannte Variable

3.22 Matrixminimum-Verfahren

Wir suchen zunächst eine erste zulässige Basislösung und verbessern dann schrittweise diese Basislösung bis das Optimalitätskriterium erfüllt ist:

Die Matrizen für Transportkosten (c_{ij}) und für Transportmengen (c_{ij}) führt man in einem geeigneten Tableau zusammen.
Dann setzt man Mengen in die Basisvariablen x_{ij} ein, indem man gleichzeitig berücksichtigt:
(1) die Angebots- und Bedarfsmengen
(2) die Stückkosten c_{ij}. Man setzt an den Stellen der geringsten Transport-Stückkosten die höchstmöglichen Mengen ein.
Man nennt diese Methode zur Ermittlung der 1.Basislösung Matrixminimum-Verfahren.
Es ordnet den jeweils kleinsten Kosten die größten Mengen zu.

→ *Excel / Transport*

(1) Die geringsten Kosten $\min(c_{ij}) = c_{34} = 21$, in dieses Feld setzt man die max. Menge $x_{34} = 120$.
(2) Die nächst-geringsten Kosten sind $c_{14} = 22$. Um den Bedarf b_4 zu decken: $x_{14} = 10$.
(3) Die nächst-geringsten Kosten sind $c_{12} = 23$. Um den Bedarf b_1 zu decken: $x_{12} = 30$.
(4) Die nächst-geringsten Kosten sind $c_{13} = 30$. Um den Bedarf b_3 zu decken: $x_{13} = 60$.
(5) Die nächst-geringsten Kosten sind $c_{11} = 34$. Um das Angebot a_1 zu nutzen: $x_{11} = 50$.
(6) Die nächst-geringsten Kosten sind $c_{21} = 40$. Um den Bedarf b_1 zu decken: $x_{21} = 30$.

Tableau 1, 1.Basislösung (Transport-Stückkosten c_{ij} *kursiv*)

von / nach	j = 1	2	3	4	a_i
i=1	^{5}50 |*34*	^{3}30 |*23*	^{4}60 |*30*	^{2}10 |*22*	150
2	^{6}30 |*40*	|*41*	|*47*	|*28*	30
3	|*28*	|*26*	|*38*	^{1}120 |*21*	120
b_j	80	30	60	130	300

Die Zahlen $^{1-6}$ geben die Reihenfolge der Verfahrensschritte an.

Gesamtkosten $C_{gesamt} = 120{\cdot}21 + 10{\cdot}22 + 30{\cdot}23 + 60{\cdot}30 + 50{\cdot}34 + 30{\cdot}40 = 8.130$ €.

Die Transportmengen x_{ij} der besetzten Felder nennt man Basisvariable. Die eventuell noch zu bestimmenden Transportmengen x_{ij} der unbesetzten Felder nennt man Nicht-Basisvariable.

Die Anzahl der Basisvariablen ist normalerweise $m + n - 1$, im Beispiel $3 + 4 - 1 = 6$.
Das Transport-Verfahren setzt dies zwingend voraus: Anzahl der Basisvariablen x_{ij}: $m + n - 1$
Eine Basislösung ist nur zulässig, wenn sie m+n-1 besetzte Felder aufweist.
Das gilt für alle Basislösungen, nicht nur für die erste.

Sonderfall 1 Anzahl der Basisvariablen $< m + n - 1$

Wenn man durch das Einsetzen einer Basisvariablen gleichzeitig eine Zeilen- und Spaltengleichung erfüllt, enthält die Basislösung zu wenig Basisvariable, sie ist dann unzulässig.
Eine kleine Änderung des Beispiels 3.10 ergibt:

Tableau 1, 1.Basislösung (Transport-Stückkosten c_{ij} *kursiv*)

von / nach	j = 1	2	3	4	a_i
i=1	^{3}80 |*23*	|*43*	^{6}60 |*30*	^{2}10 |*22*	150
2	|*40*	^{4}30 |*25*	|*47*	0 |*28*	30
3	|*28*	|*26*	|*38*	^{1}120 |*21*	120
b_j	80	30	60	130	300

x_{22}=30 erfüllt a_2 und b_2 gleichzeitig

Man löst dieses Problem, indem man in ein leeres Feld in der durch x_{22} erfüllten Zeile oder Spalte eine Basisvariable 0 einfügt, beliebig für x_{12} oder x_{32} oder x_{21} oder x_{23} oder x_{24}.

3.23 MODI-METHODE

Das optimale Transportprogramm erhält man schrittweise über bestimmte Optimierungsschritte:

1. Es ist zu prüfen, ob die gegebene Basislösung optimal ist.
2. Die unbesetzten Felder, die die größte Kostenverringerung versprechen, sind zu besetzen.
3. Aufgrund des neu besetzten Feldes sind Basisvariable umzubelegen.

1a. Es ist zu prüfen, ob die gegebene Basislösung optimal ist… usw.

Die MODI-Methode (Modified Distribution Method) nach DANTZIG (1951) ist weit verbreitet.
(auch uv-Methode, Potentialmethode oder duale Transportmethode genannt)

Zunächst reduziert man die Kostenmatrix (c_{ij}):
Für die unbesetzten Feldern bestimmt man Kostenänderungswerte (Kostendifferenzen) d_{ij}.
Dazu subtrahiert man die Transportkosten der besetzten Felder von denen der nichtbesetzten.

Ist eine Kostendifferenz d_{ij} negativ, heißt das, dass die Kosten dieses unbesetzten Feldes niedriger sind als die der entsprechenden besetzten Felder: das Transportprogramm ist noch nicht optimal, also lohnt sich die Änderung des Transportprogramms:

Optimalitätskriterium: $d_{ij} \geq 0$ für alle unbesetzten Felder (Nicht-Basisvariable)

Ist in einem unbesetzten Feld $d_{ij} > 0$, dann würde eine Umverteilung der Transportmengen zugun-sten dieses Feldes die gesamten Transportkosten C_{gesamt} erhöhen.
Ist in einem unbesetzten Feld $d_{ij} = 0$, dann hätte eine Umverteilung keine Auswirkungen auf C_{gesamt}, dann gibt es mehrere optimale Lösungen.
Die Werte d_{ij} nennt man auch "Opportunitätskosten" oder "Schattenpreise".

Die Kostenmatrix (c_{ij}) wird reduziert, indem man Hilfsvariable u_i von den Zeilenwerten und v_j von den Spaltenwerten so subtrahiert, dass die Kostendifferenzen der besetzten Felder $d_{ij} = 0$.

für besetzte Felder: $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0$ => $u_i = c_{ij} - v_j$ und $v_j = c_{ij} - u_i$

für unbesetzte Felder: $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = c_{ij} - (u_i + v_j)$ => d_{ij}

Wir benötigen $n + m$ Hilfsvariable u_i bzw. v_j
Wir haben aber nur $n+m$-1 Gleichungen $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0$ um diese zu bestimmen.
Dieses Gleichungssystem ist also unterbestimmt. Man wählt üblicherweise $u_1 = 0$.

Man erweitert das Tableau um eine u_i-Spalte und eine v_j-Zeile und trägt die entsprechenden Werte nach einfache Substraktionen ein:
für besetzte Felder: $v_1 = 34 - 0$. $v_2 = 23 - 0$ … $u_2 = 40 - 34 = 6$. $u_3 = 21 - 22 = -1$
für unbesetzte Felder die Kostendifferenzen: $d_{22} = 41 - 6 - 23 = 12$. $d_{31} = 28 - 34 + 1 = -5$

1.Basislösung mit den Variablen u_i , v_j , d_{ij} (c_{ij} und d_{ij} *kursiv*)

	nach j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
von i	$u_i \backslash v_j$	$v_1 = 34$	$v_2 = 23$	$v_3 = 30$	$v_4 = 22$	
A_1	u_1=0	50 |*34*	30 |*23*	60 |*30*	10 |*22*	150
A_2	u_2=6	30 |*40*	|*41* |***12***	|*47* |***11***	|*28* |***0***	30
A_3	u_3=-1	|*28* |***-5***	|*26* | ***4***	|*38* | ***9***	120 |*21*	120
b_i		80	30	60	130	300

→ *Excel / Transport*

3.24 OPTIMIERUNGSSCHRITTE I

Das optimale Transportprogramm erhält man iterativ über bestimmte Optimierungsschritte:

1. Es ist zu prüfen, ob die gegebene Basislösung optimal ist.
2. Die unbesetzten Felder, die die größte Kostenverringerung versprechen, sind zu besetzen.
3. Aufgrund des neu besetzten Feldes sind Basisvariable umzubelegen.

1a. Es ist zu prüfen, ob die gegebene Basislösung optimal ist… usw.

zu 1. Nicht alle $d_{ij} \geq 0$: $d_{31} = -5$ also noch nicht optimal.

zu 2. $\min(d_{ij}) = -5$. d_{31} ist der kleinste d_{ij}-Wert.
Das Feld x_{31} muss mit der größtmöglichen Transportmenge besetzt werden,
das ist $\Delta x = x_{31} = b_1 - x_{21} = 80 - 30 = 50$ Einheiten. Die Menge $x_{34} = 120 > b_1$ wäre zu groß.

zu 3. Diese Änderung führt in der Zeile und der Spalte in der x_{31} steht, zu Umbelegungen.
Man führt einen Umbelegungs-Zyklus durch, d.h. einen Rundgang über besetzte Felder mit den entsprechenden Veränderungen um +50 bzw. - 50.

Tableau 2. 2.Basislösung mit den Variablen u_i , v_j , d_{ij} (c_{ij} und d_{ij} *kursiv*)

	nach j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
von i	$u_i \backslash v_j$	$v_1 = 34$	$v_2 = 23$	$v_3 = 30$	$v_4 = 22$	
A_1	0	[2] |*34* (-50)		30 |*23* |	60 |*30* |	[4] 60 |*22* (+50)		150
A_2	6	30 |*40* |	|*41* |***12***	|*47* |***11***	|*28* |***0***	30
A_3	-1	[1] 50 |*28* (+50) |***-5***	|*26* | ***4***	|*38* | ***9***	[3] 70 |*21* (-50)		120
b_i		80	30	60	130	300

zu 1a. Es ist jetzt wieder zu prüfen, ob die gegebene Basislösung optimal ist:
Dazu müssen die veränderten Hilfsvariablen u_i, v_j, d_{ij} berechnet und eingetragen werden:

Tableau 2. 2.Basislösung mit den neuen Variablen u_i , v_j , d_{ij}
Änderungen schattiert

	nach j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
von i	$u_i \backslash v_j$	$v_1 = 29$	$v_2 = 23$	$v_3 = 30$	$v_4 = 22$	
A_1	0	|*34* |***5***	30 |*23* |	60 |*30* |	60 |*22* |	150
A_2	11	30 |*40* |	|*41* | ***7***	|*47* | ***6***	|*28* |***-5***	30
A_3	-1	50 |*28* |	|*26* | ***4***	|*38* | ***9***	70 |*21*	120
b_i		80	30	60	130	300

$c_{12} = 23 = 0+23$
$c_{13} = 30 = 0+30$
$c_{14} = 22 = 0+22$
$c_{34} = 21 = 22-1$
$c_{31} = 28 = -1+29$
$c_{21} = 40 = 11+29$

$d_{11} = 34-(0+29)=5$
$d_{22} = 41-(11+23)=7$
$d_{23} = 47-(11+30)=6$
$d_{24} = 28-(11+22)= -5$
$d_{32} = 26-(-1+23)=4$
$d_{33} = 38-(-1+30)=9$

zu 1. Nicht alle $d_{ij} \geq 0$: $d_{24} = -5$, also noch nicht optimal.

zu 2. $\min(d_{ij}) = -5$. d_{24} ist der kleinste d_{ij}-Wert.
Das Feld x_{24} muss mit der größtmöglichen Transportmenge besetzt werden,
das ist $x_{24} = a_2 = 30$ Einheiten. (Das Angebot a_2 =30 begrenzt die Transportmenge)

zu 3. Diese Änderung führt in der Zeile und der Spalte in der x_{24} steht, zu Umbelegungen.
Man führt einen Umbelegungs-Zyklus durch:

3.25 Optimierungsschritte II

Man führt einen Umbelegungs-Zyklus durch:

Tableau 3. 3.Basislösung (mit bisherigen Variablen u_i, v_j, d_{ij})

Verbessertes Transportprogramm, Änderungen schattiert

	nach j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
von i	$u_i \backslash v_j$	v_1 = 29	v_2 = 23	v_3 = 30	v_4 = 22	
A_1	0	|*34* |**5**	30 |*23* |	60 |*30* |	60 |*22* |	150
A_2	11	[2] | *40* |	|*41* | ***7***	|*47* | ***6***	[1]30 |*28* |***-5***	30
A_3	-1	[3]80 |*28* |	|*26* | ***4***	|*38* | ***9***	[4]40 |*21*	120
b_i		80	30	60	130	300

zu 1a. Es ist jetzt wieder zu prüfen, ob die gegebene Basislösung optimal ist:

Dazu müssen die veränderten Hilfsvariablen u_i, v_j, d_{ij} berechnet und eingetragen werden:

Tableau 3. 3.Basislösung mit den neuen Variablen u_i, v_j, d_{ij}

Änderungen schattiert

	nach j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
von i	$u_i \backslash v_j$	v_1 = 29	v_2 = 23	v_3 = 30	v_4 = 22	
A_1	0	|*34* |**5**	30 |*23* |	60 |*30* |	60 |*22* |	150
A_2	6	|*40* | ***5***	|*41* |***12***	|*47* |***11***	30 |*28* |	30
A_3	-1	80 |*28* |	|*26* | ***4***	|*38* | ***9***	40 |*21*	120
b_i		80	30	60	130	300

$c_{12} = 23 = 0+23$
$c_{13} = 30 = 0+30$
$c_{14} = 22 = 0+22$
$c_{24} = 28 = 22+6$
$c_{34} = 21 = -1+22$
$c_{31} = 28 = -1+29$

$d_{11} = 34-(0+29)=5$
$d_{21} = 40-(6+29)=5$
$d_{22} = 41-(6+23)=12$
$d_{23} = 47-(6+30)=11$
$d_{32} = 26-(-1+23)=4$
$d_{33} = 38-(-1+30)=9$

zu 1a. Alle $d_{ij} \geq 0$: das Transportprogramm ist optimal.

Gesamte Transportkosten der 1.Basislösung (Matrixminimum-Methode): 8.130 €
Gesamte Transportkosten der 2.Basislösung 7.880 €
Die minimale Summe der Transportkosten ist C_{gesamt} = 7.730 €

3.26 Transportverfahren

<u>Aufgabe Transport</u>

Gegeben: Angebots- und Nachfragemengen: $\sum a_i = \sum b_j$, Kostenmatrix: $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$

Gesucht: das optimale Transportprogramm: $C_{gesamt} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \text{Min}$

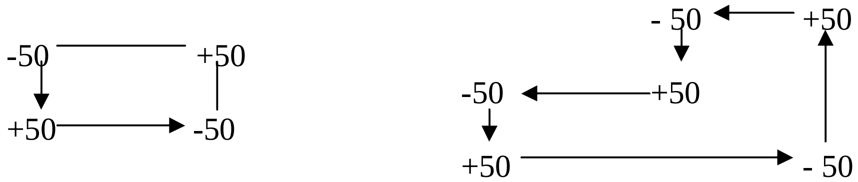
Schritte:

1. Man erstellt ein Tableau, das die kombinierten Matrizen enthält (Vordruck).
2. Man entwickelt mit dem Matrixminimum-Verfahren eine 1.Basislösung, indem man den jeweils kleinsten Kosten c_{ij} die größten Mengen x_{ij} zuordnet => m-n-1 Basisvariable unter den Bedingungen: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1,\ldots,m).$ $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \ (j = 1,\ldots,n).$ $x_{ij} > 0$
3. Für die besetzten Felder bestimmt man die Hilfsvariablen u_i,v_j: $c_{ij} = u_i + v_j$
4. Für die unbesetzten Felder bestimmt man die Kostendifferenzen $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$
5. Man prüft, ob die aktuelle Basislösung optimal ist: optimal, wenn $d_{ij} \geq 0$ für alle x_{ij}.
6. Man führt eine Umbelegung durch, wenn die Basislösung nicht optimal ist

   6.1 Ausgehend von min(d_{ij}) sucht man <u>den</u> vollständigen Rundgang in Form einer Turmbewegung (Bewegung des Turms im Schachspiel). Die Ecken des Rundgangs müssen Basisvariable enthalten (besetzt sein).

   6.2 Man sucht den maximalen Betrag Δx, der subtrahiert werden kann, ohne negative Basisvariable zu erhalten. (An dieser Stelle wird die Basisvariable entfernt, dadurch bleibt die Anzahl der Basisvariablen $m+n-1$ unverändert)

   6.3 Im Feld mit min(d_{ij}) ist der Differenzbetrag Δx zu addieren, dann wird an den Ecken Δx abwechselnd subtrahiert bzw. addiert, so dass alle Zeilen- und Spaltenbedingungen erfüllt sind.



7. Die Schritte 3. bis 6. werden wiederholt, bis die optimale Basislösung erreicht ist.

<u>Beisp. 3.11 Umbelegungsproblem</u> → *Excel / Transport*

Führen Sie die nächste Umbelegung durch…

<u>Typische Anwendungen der Transportmethode</u>

Die Transportmethode kann für alle Optimierungen eingesetzt werden, bei denen es um die optimale Verteilung austauschbarer (homogener) Güter und Dienstleistungen geht:

a) Optimales Beschaffungsprogramm: m Lieferanten bieten n verschiedene, aber austauschbarer Güter bzw. Dienstleistungen zu verschiedenen Preisen p_{ij} an.
b) Produktionsplanung: m Maschinen produzieren n vergleichbare (austauschbare) Produkte zu verschiedenen Kosten c_{ij} her. Die Maschinen sind so mit den Produkten zu belegen (Maschinenbelegungsplan), dass die Gesamtkosten minimal wird.
c) Lagerhaltung: n Lagerstätten (Bestimmungsorte B_j) können n gleichartige Güter in verschiedenen Mengen und zu unterschiedlichen Lagerkosten c_{ij} aufnehmen. Die Lagerung ist so zu planen, dass die gesamten Lagerkosten minimal werden.
d) Optimale Verteilung von Transportfahrzeugen, Container, Güterwaggons u.ä.: leere Güter-waggons sollen von Stellen A_i an denen Überschuss besteht, an Orte B_j gebracht werden, wo Bedarf besteht.
   Die Gesamtkosten oder die gesamte Fahrstrecke sollen minimiert werden.

3.27 Sonderfälle und Varianten

Sonderfall 1 Anzahl der Basisvariablen $< m + n - 1$ siehe Abschnitt 3.22

Sonderfall 2 Alle $d_{ij} \geq 0$, ein oder mehrere $d_{ij} = 0$ siehe Abschnitt 3.23
Eine Umverteilung hat keine Auswirkungen auf C_{gesamt}, es gibt es mehrere optimale Lösungen.

Sonderfall 3 Ein Feld x_{ij} ist gesperrt
In einem solchen Feld ist aus irgendwelchen Gründen der Transport ist ausgeschlossen.
Man setzt dann in diesem Feld die Transportstückkosten sehr hoch an (∞), so dass ihm keine Menge zugewiesen wird.

Sonderfall 4 Bestimmte Transportmengen sind vertraglich fixiert
Felder, deren Transportmengen x_{ij} festliegen, behalten ihren Inhalt bei, werden also durch die Optimierungsschritte nicht verändert. Diese Mengen werden bei den Umbelegungen in gleicher Weise berücksichtigt wie die ebenfalls festliegenden Gesamtmengen a_i und b_j.

Sonderfall 5 Umladeprobleme, Transshipment Problems
Zwischen den Ausgangsorten A_i und den Bestimmungsorten B_j können Umladeorte U_k zwischengeschaltet sein. Die (homogenen) Produkte werden also nicht unmittelbar von den Produktionsorten A_i zu den Bedarfsorten Bj transportiert, sondern zuerst zu Umlade- oder auch zu Umrüststationen gebracht. Unter diesen Umständen gibt es natürlich beträchtlich mehr Kombinationsmöglichkeiten, das Lösungsverfahren ist jedoch das gleiche.

Sonderfall 6 Maximierung statt Minimierung Maximiere $G_{gesamt} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_{ij}$

Die Basisvariable sind dann Deckungsbeiträge (Stückgewinne) g_{ij}. Die einfachste Lösungsmöglichkeit ist die analoge Verwendung von Deckungsbeitragsdifferenzen d_{ij} statt Kostendifferenzen.
Solange es in der Matrix noch $d_{ij} > 0$ gibt, werden noch Mengen x_{ij} an der Stelle der größten Differenz $\max(d_{ij})$ eingesetzt. Eine entsprechende Umbelegung führt zu einer verbesserten Lösung.

Sonderfall 7 Gesamte Angebotsmenge < gesamte Bedarfsmenge $\sum a_i < \sum b_j$
Dann führt man einen zusätzlichen, fiktiven Ausgangsort in das Modell ein.
Der Nachfrageüberhang wird beim Matrixminimum-Verfahren als letztes berücksichtigt.
Da für die fiktiven Transporte keine Kosten anfallen, setzt man sie null. (vgl. Sonderfall 8)

Sonderfall 8 Gesamte Angebotsmenge > gesamte Bedarfsmenge $\sum a_i > \sum b_j$
Dann führt man einen zusätzlichen, fiktiven Bestimmungsort in das Modell ein.
Angenommen im obigen Beispiel sei die Angebotsmenge $a_2 = 80$ Einheiten.
Es entsteht ein Angebotsüberhang $x_{25} = \sum a_i - \sum b_j = 350 - 300 = 50$ Einheiten.
Die Transportstückkosten für die fiktiven Transporte zum Bestimmungsort B_5 sind $c_{i5} = 0$
Bildet man mit dem Matrixminimum-Verfahren die 1.Basislösung, so wird die Spalte mit den fiktiven Transporten erst belegt, wenn alle anderen Spalten erfüllt sind.

1.Basislösung (Transport-Stückkosten c_{ij} *kursiv*)

von / nach	j = 1	2	3	4	5	a_i
i=1	^{5}50 | *34*	^{3}30 | *23*	^{4}60 | *30*	^{2}10 | *22*	| *0*	150
2	^{6}30 | *40*	| *41*	| *47*	| *28*	"50" | *0*	80
3	| *28*	| *26*	| *38*	^{1}120 | *21*	| *0*	120
b_i	80	30	60	130	"50"	350

Die weiteren Schritte zur Bestimmung des optimalen Transportprogramms sind die gleichen.

SIMPLEXKÖRPER